

**РАСЧЕТ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ
НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ В ГРУНТЕ
НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ПАСТЕРНАКА**

И. Т. ПИРМАМЕДОВ

Бакинский Государственный Университет

В данной статье рассматриваются параметрические колебания заглубленного в грунт прямолинейного неоднородного по толщине стержня с учетом физической и геометрической нелинейности. Задача решена вариационным методом. Построены характерные кривые зависимости для критической силы.

Тонкостенные элементы конструкций типа стержней находят широкое применение в технике. Расчет их в случае учета физической и геометрической нелинейности с учетом влияния внешней среды затруднителен, хотя тонкостенные конструкции более просты в силу одномерности. Несмотря на это, требуется проведение надежного расчета на прочность для полного описания несущей способности таких конструкций с учетом влияния внешней среды. Учет влияния грунта осуществляется на основе модели Пастернака. Суть этой модели заключается в том, что действие грунта на стержня по поверхности контакта определяется зависимостью

$$q_z = \left(\tilde{q} + \tilde{q}_0 \frac{d^2}{dx^2} \right) W = kW$$

где $k = \tilde{q} + \tilde{q}_0 \frac{d^2}{dx^2}$, а W -прогиб оболочки.

Решение такого типа задач представляет математическую трудность, которая усугубляется учетом динамических эффектов, учет которых необходим в задачах строительства зданий и сооружений, в задачах виброзащиты. В этом случае предпочтительным представляется применение вариационных принципов. Применение вариационного метода продиктовано не только удобствами численного расчета, но и возможностью получения непротиворечивой теории тонкостенных конструкций.

Рассмотрим находящийся в грунте неоднородный по толщине и прямоугольный в плане прямолинейный стержень, толщиной $2h$, длиной l . Пусть на верхний торец стержня действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности

$$p = p_0 + p_1 \sin \omega_1 t,$$

где p_0 - средняя или основная нагрузка, p_1 - амплитуда изменения нагрузки, ω_1 - частота ее изменения. Очевидно, что рассмотрение такой нагрузки позволяет исследовать более общий случай зависимости торцевой нагрузки от времени. Действие грунта на стержень определим силой q_0 , распределенной по длине стержня и пропорциональной прогибу стержня.

Для исследования параметрических колебаний стержня, находящегося в грунте, воспользуемся вариационным принципом. Применительно к нашей задаче соответствующий функционал [1] можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} J = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \dot{N} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \dot{W}}{\partial x} \right) - \dot{M} \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} N \left(\frac{\partial \dot{W}}{\partial x} \right)^2 - \right. \\ & - \frac{1}{8h^2} \left(\frac{\dot{N}^2}{E_0} + \frac{6}{h^2} \frac{1}{E_1} \dot{N}\dot{M} + \frac{9}{h^4} \frac{1}{E_2} \dot{M}^2 \right) - \frac{1}{4h^2} \dot{N} \times \\ & \times \left[\int_0^t \left[K_0(t-\tau)N + \frac{3}{h^2} K_1(t-\tau)M \right] d\tau \right] - \frac{3}{4h^4} \dot{M} \times \\ & \times \left[\int_0^t \left[K_1(t-\tau)N + \frac{3}{h^2} K_2(t-\tau)M \right] d\tau \right] - \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial \dot{W}}{\partial x} \right)^2 \left. \right\} dxdt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{u}(l) - \dot{u}(0) \right] 2\dot{p}hdt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l k \frac{\dot{W}^2}{2} dt dx, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\frac{1}{E_i} = \int_{-h}^h \frac{z^i}{E(z)} dz$, z - поперечная координата, $E(z)$ - переменный модуль упругости Юнга, ρ_0 - плотность, $[t_1, t_2]$ - интервал времени изучаемого процесса, $K_0(t-\tau)$, $K_1(t-\tau)$, $K_2(t-\tau)$ - ядра ползучести, u - продольная компонент вектора перемещения точек стержня.

Так как исследуются параметрические колебания, представляющие собой периодические колебания, то:

$$t_2 = t_1 + T,$$

где T - период параметрических колебаний. Для простоты примем $t_1 = 0$. Исходя из вариационного принципа, необходимо поставить начальные

условия в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$. Ввиду периодичности искомого решения в этом нет необходимости. Отметим, что периодическое решение существует, если ядро ползучести затухающее. При этом периодичность будет проявляться при больших значениях времени. Под параметром дифференцирования понимается параметр, характеризующий нагружение. В рассматриваемом случае нагружение зависит от двух параметров P_0 и P_1 . В общем случае они не связаны друг с другом. Но если бы стояла задача, при решении которой необходимо задать лишь конкретные значения P_0 и P_1 , то можно было бы их конечные значения определить одно через другое, а за параметр дифференцирования взять, например, P_0 . Для данной задачи необходимо будет строить зависимости, в которых один из параметров будет меняться. В этом случае целесообразно ввести два параметра дифференцирования. Первоначально, принимая $P_1 = 0$ за параметр дифференцирования, берется P_0 . Система уравнений решается до конкретного значения P_0 . Затем за параметр дифференцирования берется P_1 , считая, что P_0 не зависит от P_1 . Начальные условия в этом случае определяются решением на предыдущем этапе. Тем самым задача может быть решена в два этапа, которые демонстрируются ниже.

В функционале (1) варьируемыми величинами являются \dot{u} , \dot{W} , \dot{M} , \dot{N} . Найдем его стационарное значение. Для этого первоначально проварируем его по \dot{u} . С учетом равенства $N = -2Ph$ исключается из рассмотрения величина \dot{u} . В результате функционал (1) примет вид:

$$\begin{aligned}
J = & \int_0^l \int_0^t \left\{ -2h\dot{p} \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \dot{W}}{\partial x} + \dot{M} \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial x^2} + h\dot{p} \left(\frac{\partial \dot{W}}{\partial x} \right)^2 - \right. \\
& \frac{1}{8h^2} \left(\frac{4h^2 \dot{p}^2}{E_0} + \frac{12\dot{p}}{E_1 h} \dot{M} + \frac{9}{h^4} \frac{1}{E_2} \dot{M}^2 \right) + \frac{1}{2h} \dot{p}^2 \times \\
& \times \left[\int_0^t \left[K_0(t-\tau)(-2ph) + \frac{3}{h^2} K_1(t-\tau)M \right] d\tau \right] - \frac{3}{4h^4} \dot{M} \times \\
& \times \left[\int_0^t \left[K_1(t-\tau)(-2ph) + \frac{3}{h^2} K_2(t-\tau)M \right] d\tau \right] - \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial \dot{W}}{\partial x} \right)^2 \Big\} dx dt + \int_0^l \int_0^t k \frac{\dot{W}^2}{2} dt dx. \quad (2)
\end{aligned}$$

Очевидно, что стационарное значение приведенного функционала (2) так же, как и стационарное значение функционала (1), определяет ре-

шение поставленной задачи. В функционале (2) варьируемыми величинами являются \dot{M}, \dot{W} . Найдем их, используя метод Ритца. Исходя из ожидаемой картины поведения стержня, аппроксимацию для искомых величин возьмем следующим образом:

$$\begin{aligned} W &= \sin \frac{\pi x}{l} (W_0 \cos \omega t + W_1 \sin \omega t), \\ M &= \sin \frac{\pi x}{l} (M_0 \cos \omega t + M_1 \sin \omega t), \end{aligned} \quad (3)$$

где ω - частота колебаний. Зависимость от x взята в таком виде для удовлетворения торцевых условий, а именно шарнирного опирания: при $x = 0, l$ должно быть $W = 0, M = 0$. В общем случае частота установившихся колебаний является неизвестной величиной, которую надо найти из условия стационарности функционала. Но в данной задаче нас будет интересовать начало параметрического резонанса в зависимости от внешних параметров. Поэтому, ω будем считать заданным.

Основываясь на методе Ритца, поставим аппроксимацию (3) в выражение функционала (2) и проинтегрируем его по переменным x и t . В результате получим:

$$\begin{aligned} J = & -2\dot{p}_0 \frac{\pi}{2} (W_0 \dot{W}_0 + W_1 \dot{W}_1) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{\pi}{2} - 2p_1 \times (\dot{W}_0 W_1 + W_0 \dot{W}_1) \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{\pi^2}{4} (M_0 \dot{W}_0 + M_1 \dot{W}_1) - \\ & - h \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{\pi^2}{4} \left\{ p_0 (\dot{W}^2 + \dot{W}_1^2) + \frac{p_1}{2} \dot{W}_0 \dot{W}_1 \right\} - \frac{1}{8h^2} \times \left\{ 4h^2 \frac{\pi}{E_0} \left(\pi \dot{p}_0^2 + \frac{\pi}{2} \dot{p}_1^2 \right) - \frac{24}{E_1 h} \left(2\dot{p}_0 M_1 + \frac{4}{3} \dot{p}_1 M_0 \right) + \right. \\ & + \frac{9}{h^4} \frac{\pi^2}{4E_2} (M_0^2 + M_1^2) \left. \right\} + \frac{\dot{p}_0}{2h} J_1 + \frac{\dot{p}_1}{2h} J_2 - \frac{3}{4h^4} M_0 \times \left\{ -2p_1 \Phi_{1c}^{(2)} \frac{8}{3} + \frac{3}{h^2} \frac{\pi^2}{4} (M_0 \Phi_{2c} - M_1 \Phi_{3c}) \right\}^2 - \\ & - \frac{3}{4h^4} M_1 \left\{ -8hp_0 \Phi_{10} - \frac{8}{3} hp_0 \Phi_{10} - \frac{8}{3} hp_1 \Phi_{1s}^{(2)} + \frac{3}{h^2} \frac{\pi^2}{4} \times \right. \\ & \left. \times (M_0 \Phi_{2s} - M_1 \Phi_{3c}) \right\} - \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\pi^2}{4} (\dot{W}_0^2 + \dot{W}_1^2) W^2 + k \frac{\pi^2}{4} \dot{W}^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где J_i - некоторые функции от M_i и p_i , не влияющие на стационарное значение функции J , Φ_{ic} и Φ_{is} - соответственно косинуса и синуса образ Фурье его ядра $K_i(t - \tau)$.

Итак, нахождение стационарного значения функционала (2) сводится к нахождению стационарного значения функции (4). Это значение определяется из следующей системы:

$$\frac{\partial J}{\partial \dot{W}_0} = 0; \quad \frac{\partial J}{\partial \dot{W}_1} = 0; \quad \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_0} = 0; \quad \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_1} = 0. \quad (5)$$

Система (5) в раскрытой форме имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \dot{W}_0} &= -2h\dot{p}_0 W_0 - h\dot{p}_1 W_1 + \dot{M}_0 - 2h\dot{p}_0 \dot{W}_0 - h\dot{p}_1 \dot{W}_1 - \left[\rho_0 \omega^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^{-2} - k \frac{\pi^2}{2} \right] \dot{W}_0 = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial \dot{W}_1} &= -2h\dot{p}_0 W_1 - h\dot{p}_1 W_0 + \dot{M}_1 - 2h\dot{p}_0 \dot{W}_1 - h\dot{p}_1 \dot{W}_0 - \left[\rho_0 \omega^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^{-2} - k \frac{\pi^2}{2} \right] \dot{W}_1 = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_0} &= \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{\pi^2}{4} \dot{W}_0 - \frac{1}{8h^2} \left[-\frac{1}{h^2} \frac{1}{E_1} \frac{8}{3} \dot{p}_1 + \frac{9}{h^4} \frac{1}{E_2} \frac{\pi^2}{2} \dot{M}_0 \right] - \\ &\quad - \frac{3}{4h^4} \left[-\frac{16}{3} h\dot{p}_1 \Phi_{1c}^{(2)} + \frac{3}{h^2} \frac{\pi^2}{4} (M_0 \Phi_{2c} - M_1 \Phi_{2s}) \right] = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_1} &= \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{\pi^2}{4} \dot{W}_1 - \frac{1}{8h^2} \left[-\frac{1}{h^2} \frac{1}{E_1} \frac{8}{3} \dot{p}_0 + \frac{9}{h^4} \frac{1}{E_2} \frac{\pi^2}{2} \dot{M}_1 \right] - \\ &\quad - \frac{3}{4h^4} \left[-8h\dot{p}_0 \Phi_{10} - \frac{8}{3} h\dot{p}_1 \Phi_{1s}^{(2)} + \frac{3}{h^2} \frac{\pi^2}{4} (M_0 \Phi_{2c} + M_1 \Phi_{2s}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В качестве начальных условий для решения полученной системы, основываясь на вариационный принцип, возьмем следующие: отсутствие напряжения и прогиба при отсутствии нагрузки. Перейдем к решению системы (6). Приведенная система является системой квазилинейных дифференциальных уравнений.

На первом этапе примем $p_1 = 0$, а за параметр дифференцирования возьмем величину p_0 . Тогда система (6) примет вид:

$$\begin{aligned} -2hW_0 + \dot{M}_0 - 2h\dot{p}_0 \dot{W}_0 - \left[\rho_0 \omega^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^{-2} - k \frac{\pi^2}{2} \right] \dot{W}_0 &= 0, \\ -2hW_1 + \dot{M}_1 - 2h\dot{p}_0 \dot{W}_1 - \left[\rho_0 \omega^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^{-2} - k \frac{\pi^2}{2} \right] \dot{W}_1 &= 0, \\ \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{\pi^2}{4} \dot{W}_0 - \frac{1}{8h^2} \frac{9}{h^4} \frac{1}{E_2} \frac{\pi^2}{2} \dot{M}_0 - \frac{9}{4h^4} \frac{\pi^2}{4h^2} (M_0 \Phi_{2c} - M_1 \Phi_{2s}) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{\pi^2}{4} \dot{W}_1 - \frac{1}{8h^2} \left[-\frac{1}{h} \frac{48}{E_1} + \frac{9}{h^4} \frac{1}{E_2} \frac{\pi^2}{2} \dot{M}_1 \right] - \\ & - \frac{3}{4h^4} \left[-8h\Phi_{10} + \frac{3}{h^3} \frac{\pi^2}{4} (\dot{M}_0 \Phi_{2s} + \dot{M}_1 \Phi_{2c}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Начальные условия будут: $W_i = 0$; $M_i = 0$ при $P_0 = 0$.

Отметим, что система (7) имеет решение, если ее главный определитель отличен от нуля. Это, в свою очередь, возможно, если ω не является собственной частотой стержня.

На втором этапе примем $p_0 = 0$ и в качестве варьируемого параметра примем p_1 , считая, что p_0 не зависит от p_1 . Тогда система (6) будет переписана следующим образом:

$$\begin{aligned} & -2h\dot{p}_0 \dot{W}_0 - h\dot{W}_1 + \dot{M}_0 - 2h\dot{p}_0 \dot{W}_0 - hp_1 \dot{W}_1 - \left[\rho_0 \omega^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^{-2} - k \frac{\pi^2}{2} \right] \dot{W}_0 = 0, \\ & -h\dot{W}_0 + \dot{M}_1 - 2h\dot{p}_0 \dot{W}_1 - hp_1 \dot{W}_0 - \left[\rho_0 \omega^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^{-2} - k \frac{\pi^2}{2} \right] \dot{W}_0 = 0, \\ & \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{\pi^2}{4} \dot{W}_0 - \frac{1}{8h^2} \left[-\frac{32}{h} \frac{1}{E_1} + \frac{9}{h^4} \frac{1}{E_2} \frac{\pi^2}{2} \dot{M}_0 \right] - \\ & - \frac{3}{4h^4} \left[-\frac{16}{3} h\Phi_{1c}^{(2)} + \frac{3}{h^2} \frac{\pi^2}{4} (\dot{M}_0 \Phi_{2c} - \dot{M}_1 \Phi_{2s}) \right] = 0, \quad (8) \\ & \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{\pi^2}{4} \dot{W}_1 - \frac{1}{8h^2} \frac{9}{h^4} \frac{1}{E_2} \frac{\pi^2}{2} \dot{M}_1 - \\ & - \frac{3}{4h^4} \left[-\frac{8}{3} h\Phi_{1s}^{(2)} + \frac{3}{h^2} \frac{\pi^2}{4} (\dot{M}_0 \Phi_{2c} + \dot{M}_1 \Phi_{2s}) \right] = 0. \end{aligned}$$

Начальные условия для решения системы (8) определяются из решения системы (7): при $p_1 = 0$ величины W_i и M_i равны соответствующим величинам, найденным из решения системы (7) при рассматриваемом значении p_0 . Система (8) имеет решение, если ее главный определитель отличен от нуля.

Приведенное выше определяет алгоритм решения системы (6), основанный на введении двух параметров дифференцирования. Как отме-

чалось выше, обе системы (7) и (8) могут быть решены, если их главный определитель отличен от нуля. В самом деле, так как система уравнений относительно производных неоднородна, его обращение существует, если определитель отличен от нуля. Отметим, что определитель системы (7) совпадает с определителем (8), при $p_0 = 0$. Это указывает на то, что достаточно проведение анализа последней системы (8).

Цель данных исследований является определение параметрических колебаний. Для таких задач важным является определение на плоскости нагрузки-частота границы раздела устойчивых и неустойчивых колебаний. Под неустойчивыми колебаниями подразумеваются такие, когда амплитуда их во времени стремится к бесконечности, в противовес устойчивым, когда амплитуда остается ограниченной.

Очевидно, что система уравнений (6) описывает устойчивые колебания, так как она получена при стремлении времени к бесконечности. Кроме того, решение этой системы существует, если определитель отличен от нуля. В противном случае, решение неограниченно возрастает, так как система неоднородна. Отметим, что это составляет отличие от свободных колебаний, где равенство нулю определителя приводит к неопределенности. Так как определитель зависит от параметров нагрузки и частоты, то получаем, что на плоскости нагрузка-частота равенство определителя нулю определяет некоторую кривую. Эта кривая и определяет границу зоны устойчивости параметрических колебаний. Таким образом, для решения основной задачи параметрических колебаний достаточно исследовать условия обращения в ноль главного определителя системы.

Отметим, что такая формулировка задачи определяет алгоритм решения: найти значения частот и параметров нагружения, при которых напряженно-деформированное состояние стремится к бесконечности. Была проведена численная реализация. Ядро ползучести принято в виде:

$$K(z, t) = \frac{a}{E(z)} e^{-\beta t},$$

где a и β - эмпирические параметры. В этом случае синус и косинус образы Фурье ядра ползучести имеют вид:

$$\Phi_0 = a \int_0^{\infty} e^{-\beta y} dy = \frac{a}{\beta}; \quad \Phi_s = a \int_0^{\infty} e^{-\beta y} \sin \omega y dy = a \frac{\omega}{\beta^2 + \omega^2}; \quad \Phi_c = a \int_0^{\infty} e^{-\beta y} \cos \omega y dy = a \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2}.$$

Для удобства численного счета были введены следующие безразмерные параметры:

$$\omega = \omega_0 \beta; \quad p_i = \tau_i E_x h^3; \quad \frac{1}{E_i} = h^{i+1} \frac{1}{E_x l}, \quad \beta_0 = \frac{a}{\beta}.$$

Численный расчет был проведен для значений параметров задачи:
 $\alpha = -0,5$, $\beta_0 = 1$, $k = 2,4 \cdot 10^4$ н/м³, $\tau_0 = 0,03$, $E_x = 2 \cdot 10^{10}$ н/м²,
 $h = 10$ мм, $l = 3$ м.

На рис.1 сплошными линиями соответствуют колебания стержня в грунте, штриховыми линиями соответствуют колебания стержня без учета влияния грунта. Результаты расчета показали, что: учет влияния грунта приводит к увеличению критической силы; увеличение толщины конструкции приводит к сужению характерной кривой в окрестности точки перелома; увеличение параметра неоднородности приводит к сужению зоны ограниченных колебаний.

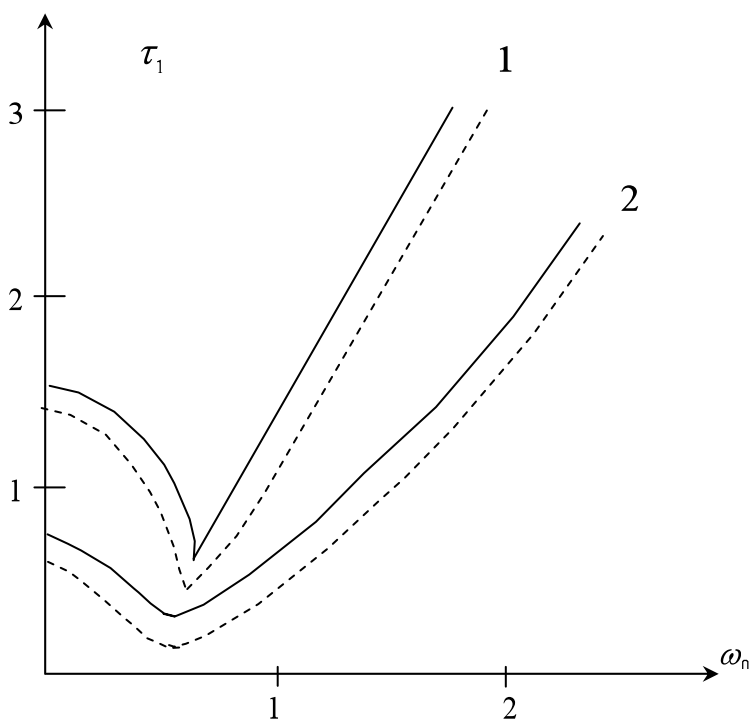


Рис.1. Зависимость τ_1 от ω_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. Москва, Стройиздат, 1954, 56 с.
2. Ализаде А.Н., Амензаде Р.Ю. Вариационный принцип нелинейно – вязкоупругости с учетом геометрической нелинейности. ДАН СССР, т.230, №6, 1976, с.1303-1305.
3. Юсифов М.О. К расчету покрытия трубопроводов при пульсирующем давлении. Изв. Вузов СССР, “Нефть и газ” №10, 1985, с.61-64.

**PASTERNAK MODELİNİN TƏTBİQİ İLƏ MİLLƏRİN QRUNTDA
QEYRİ-XƏTTİ ÖZÜLÜ PARAMETRİK RƏQSLƏRİ**

İ.T.PİRMƏMMƏDOV

ANNOTASIYA

Nazik divarlı elementi olan millər texnikada geniş tətbiq olunur. Fiziki və hündəsi qeyri-xəttilik nəzərə alındıqca, bu elementlərin hesabatında çətinliklər yaranır. Ona görə də belə məsələlərin həllinə variasiya metodu tətbiq olunur. Məqalədə hündəsi və fiziki qeyri-xəttilik nəzərə alınmaqla elastiki mühitdə millin parametrik rəqsləri variasiya metodu ilə tədqiq olunmuş və xarakteristik əyriyə qurulmuşdur.

**CALCULATION OF PARAMETRICAL FLUCTUATIONS NOT LINEARLY
VISCOELASTIC CORE IN A GROUND ON THE BASIS OF MODEL
PASTERNAK**

I.T. PIRMAMEDOV

ABSTRACT

In given clause parametrical fluctuations of a rectilinear non-uniform core on thickness are considered in view of physical and geometrical not linearity, buried in a ground. That proves application of a variation method, that he is convenient not only numerical calculation, but also an opportunity of reception of the consistent theory of thin-walled designs. Characteristic curves dependence for critical forces are constructed.